2. CIRCUIT TRANSFORMAT DE LAPLACE

Fins ara hem analitzat circuits resistius. Hem vist que a l'afegir-hi elements dinàmics, apareixen equacions diferencials, i l'anàlisi es complica. Amb les transformades de Laplace, les equacions diferencials es transformen en algebraiques, de manera que les podríem resoldre fàcilment.

En aquest tema aprofitarem tant els coneixements adquirits per circuits resistius, com els de transformades de Laplace, per poder analitzar circuits dinàmics, tal com hem fet fins ara amb els resistius.

2.1. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Segons el què hem vist a les assignatures de matemàtiques, per un senyal $f(t)$, la seva transformada de Laplace és:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Veiem que la transformada només comença a comptar a partir de zero. Haurem de procurar sempre que els senyals utilitzats compleixin:

$$f(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

En qualsevol cas podem multiplicar el senyal per un graó, per garantir que això sigui cert. Si això es compleix, podrem assegurar una relació biunívoca, de manera que tindrem garantit que podrem trobar la transformada inversa.

$f(t) \leftrightarrow F(s)$ $\qquad$ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ transformada.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ antitransformada.

Amb la transformada podrem representar el mateix, però d'una altra manera. Com que això ens facilitarà l'anàlisi de circuits, ho utilitzarem. Com que a vegades és complicat fer la transformada o l'antitransformada, intentarem memoritzar les corresponents als senyals més utilitzats. Veiem, però, primer algunes propietats que ens seran útils.

2.1.1. PROPIETATS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Veiem les propietats que ens seran més d'utilitat:

→ LINEALITAT:

Una suma de funcions és la suma de transformades:

$$\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 \cdot F_1(s) + \alpha_2 \cdot F_2(s)$$

→ DERIVACIÓ:

La transformada de la derivada d'una funció és la transformada d'aquesta funció per s, menys el valor que té la funció a l'origen (o condició inicial $f(0)$).

$$\frac{d f(t)}{dt} \longleftrightarrow s \cdot F(s) - f(0)$$

→ INTEGRACIÓ:

La transformada de la integral d'una funció, és la transformada d'aquesta funció dividida per s:

$$\int_0^t f(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

Veiem que les propietats d'integració i derivació ens permeten transformar integrals i derivades en funcions algebraiques.
Això ens serà molt útil per bobines i condensadors.
Cal que recordem sempre que s és complexa i té una part real i una part imaginària que es representen en un pla.

2.1.2. TRANSFORMADES BÀSIQUES

Estudiarem tant sols les més utilitzades, però les hem de saber.

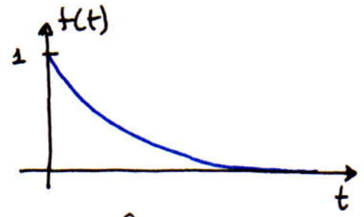
→ EXPONENCIAL:

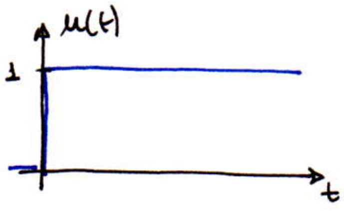
Utilitzarem habitualment l'exponencial decreixent.
Existeix per $t<0$, per tant l'haurem de multiplicar per la funció graó, o deixar clar que és per $t>0$.

$f(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$

ó

$f(t) = e^{-\alpha t}, \ \forall t > 0$





Per trobar la transformada faríem:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot u(t)\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}\,dt=-\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{s+\alpha}\underbrace{\cancel{e^{-(s+\alpha)\cdot\infty}}}_{0}+\frac{1}{s+\alpha}\underbrace{e^{-(s+\alpha)\cdot 0}}_{1}=\frac{1}{s+\alpha}$$

Així la transformada de l'exponencial decreixent serà:

$$\boxed{F(s)=\frac{1}{s+\alpha}}$$

→ GRAÓ:

Si agafem l'exponencial anterior i fem $\alpha=0$ tindrem el graó:

$f(t)=e^{-\alpha t}\cdot u(t)$ si $\alpha=0 \longrightarrow f(t)=u(t)$

$F(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$ si $\alpha=0 \longrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s}$

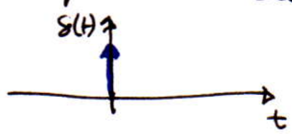
Així, la transformada del graó serà:

$$\boxed{F(s)=\frac{1}{s}}$$

→ DELTA:

La funció delta ($\delta(t)$) es representa de la següent manera:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$



Es considera que té àrea 1.

Així, integrant aquesta funció, s'obté la funció graó.
Com que coneixem la transformada del graó i també la propietat d'integració, podem fer:

$u(t)=\int_0^t \delta(t)\,dt \quad \leftrightarrow \quad U(s)=\dfrac{1}{s}$

La propietat d'integració diu:

$$\int_0^t f(t)\,dt \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \Rightarrow \frac{1}{s}=\frac{\delta(s)}{s} \Rightarrow \delta(s)=1$$

Així la transformada de la funció $\delta(t)$ serà:

$$\boxed{F(s)=1}$$

També ho haguéssim pogut fer amb la propietat de derivació:

$$\int_0^t \delta(t)\,dt=u(t) \Rightarrow \delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow \delta(s)=s\cdot U(s)=s\cdot\frac{1}{s}=1.$$

→ COSINUS:

Per buscar la transformada del cosinus, posarem aquesta funció, en funció d'exponencials, i aprofitarem la propietat de linealitat.

Considerem les expressions:

(1) $e^{jx} = \cos x + j\sin x$

(2) $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$

Si sumem les dues expressions:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \rightarrow \cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

Aprofitant aquesta expressió i la propietat de linealitat, posem la funció cosinus que ens interessa i busquem la seva transformada.

$$f(t) = \cos \omega t \cdot u(t) = \left[\frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}\right] u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{1}{2}\frac{(s+j\omega)+(s-j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-(j^2\omega^2)}$$

Per tant la transformada del cosinus serà:

$$\boxed{F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

→ SINUS:

Farem primer el mateix que pel cosinus. Posarem el sinus en funció d'exponencials, que ja sabem la transformada.

Agafem ara les expressions (1) i (2) i restem-les:

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\cdot \sin x \rightarrow \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

Posem ara l'expressió del sinus que ens interessa, i busquem la seva transformada.

$$f(t) = \sin \omega t \cdot u(t) = \left[\frac{1}{2j} e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t}\right] u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{1}{2j}\frac{(s+j\omega)-(s-j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)} = \frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2-(j^2\cdot\omega^2)}$$

Així la transformada del sinus serà:

$$\boxed{F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

→ RAMPA:

Encara que no l'utilitzarem gaire, veiem quina seria la transformada d'una rampa, ja que és fàcil de trobar, tenint en compte que la rampa és la integral del graó. Recordem que la integral és l'àrea.

$$f(t) = t \cdot u(t) \quad \rightarrow f(t) = \int_0^t u(t)\,dt \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \frac{U(s)}{s} = \frac{1/s}{s}$$

Així la transformada serà:

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s^2}}$$

Aquestes transformades són importants i les utilitzarem sovint. Serà convenient recordar-les, per tant, fem-ne un resum a continuació:

DELTA	$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$
GRAÓ	$f(t) = u(t)$	$F(s) = \frac{1}{s}$
RAMPA	$f(t) = t \cdot u(t)$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$
EXPONENCIAL	$f(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$F(s) = \frac{1}{s+a}$
SINUS	$f(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
COSINUS	$f(t) = \cos \omega t \cdot u(t)$	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Sabent les propietats de les transformades i les antitransformades, podríem plantejar les equacions dels circuits dinàmics (que contindrien integrals i derivades), transformar-les, de manera que eliminarem les integrals i derivades. El que farem però, és transformar el circuit.

Ho veiem a l'apartat següent.

2.2. CIRCUIT TRANSFORMAT DE LAPLACE

Ja hem comentat que seria millor transformar el circuit que l'equació que en surt. Per veure com es transforma el circuit, haurem de transformar les lleis d'interconnexió i també les equacions dels elements, que tot plegat definirà la topologia del circuit.

2.2.1. TRANSFORMACIÓ DE LES LLEIS D'INTERCONNEXIÓ

Partim de les dues lleis d'interconnexió que coneixem (KVL i KCL) i mirem com varien al transformar-les.

→ KVL: (Kirchhoff Voltage Law)

Sabem que aquesta llei ens diu que la suma de tensions en una malla ha de ser zero.

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t) = 0 \quad \forall t$$

Com que és una expressió lineal i tenim una propietat que ens diu que la suma de funcions és la suma de transformades tindrem que els KVL es faran igual, però utilitzant les transformades de les tensions en lloc de les tensions:

$$V_1(s) + V_2(s) + \cdots + V_n(s) = 0$$

→ KCL: (Kirchhoff current Law).

Amb els KCL passarà el mateix. Com que és la suma d'intensitats que entren a un node, i és lineal, doncs la transformada serà la suma de les transformades de les intensitats.

$$i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = 0 \quad \forall t$$

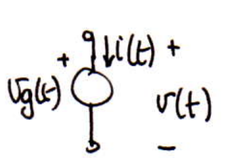
$$I_1(s) + I_2(s) + \cdots + I_n(s) = 0$$

Per tant veiem que la topologia del circuit serà la mateixa, podrem aplicar les mateixes lleis.

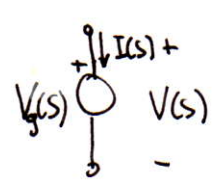
2.2.2. TRANSFORMACIÓ DELS ELEMENTS DE CIRCUIT

Per cada element tenim unes restriccions als seus terminals, que venen donades per les equacions constitutives dels elements. A partir d'elles buscarem les transformades, i veurem com queden els elements en el circuit transformat.

→ FONT DE TENSIÓ:



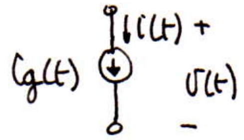
$$\left.\begin{aligned} v(t) &= v_g(t) \\ i(t) &= \text{qualsevol} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$



$$V(s) = V_g(s)$$
$$I(s) = \text{qualsevol}$$

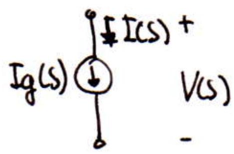
Com que tot és lineal, simplement haurem de transformar la tensió d'entrada. En el circuit transformat hi tindrem igualment una font.

→ FONT DE CORRENT:



$v(t) =$ qualsevol

$i(t) = i_g(t)$

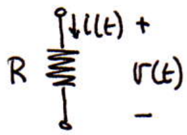


$V(s) =$ qualsevol

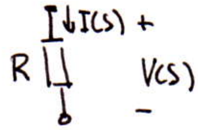
$I(s) = I_g(s)$

Passa el mateix que per la font de tensió. La transformada serà també una font de corrent de valor la transformada de $i_g(t)$.

→ RESISTÈNCIA:



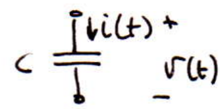
$v(t) = R \cdot i(t) \longrightarrow$



$V(s) = R \cdot I(s)$

Com que la resistència té una equació lineal, al circuit transformat tindrem també una resistència, però utilitzarem la tensió i el corrent transformats.
Noteu que dibuixarem la resistència amb una capseta i no amb el símbol típic.

→ CONDENSADOR:



$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$ no podem separar per parts per tenir separada la part anterior a zero.

$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$ la primera integral serà la tensió inicial a C ($v(0)$) i no dependrà de $i(t)$.

$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$ aquesta serà l'expressió a transformar. Recordeu però que ha de ser tot per $t>0$.

Veiem que el condensador podria estar carregat, per això ens apareix la tensió inicial. De moment no podríem representar, encara en el domini temporal:

C → estarà descarregat

$v(0)$ → és la tensió inicial. Serà com una font de tensió constant de valor $v(0)$.

Reprenem ara l'expressió per veure'n la transformada. Com que no hi podem haver senyals anteriors a zero, la condició inicial la posarem: $v(0) \cdot u(t)$. Així:

$V(s) = \mathcal{L}\{v(0) \cdot u(t)\} + \mathcal{L}\{\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau\}$

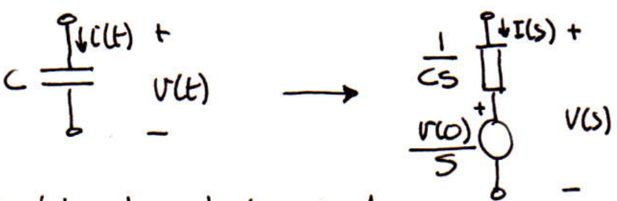
Tenim que la transformada del graó és $1/s$ i la d'una funció integrada és la transformada de la funció dividit per s. Així tindrem:

$$V(s) = \frac{v(0)}{s} + \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$$

Veiem doncs que tenim dos termes, un que no depèn de $I(s)$, que és una font de tensió, i un altre que és un valor per $I(s)$.

Veiem que ara serà lineal, es comportarà com una resistència de valor $1/Cs$, que serà el factor de proporcionalitat entre $V(s)$ i $I(s)$. D'aquest factor en diem impedància.

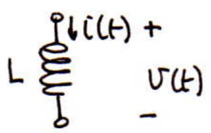
Amb tot això, l'element transformat corresponent al condensador serà:



Veiem que està format per un element que podem tractar com una resistència de valor $1/Cs$ (i que dibuixarem per una capseta) i una font de tensió en sèrie de valor $v(0)/s$.

* També podem trobar la forma Norton.

→ INDUCTOR:

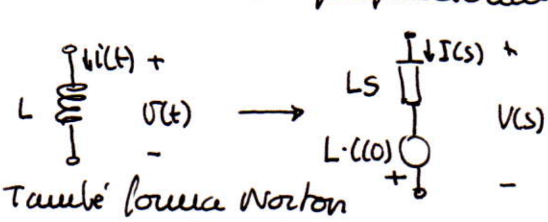


$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

Anem a transformar aquesta expressió tenint en compte la propietat de derivació:

$$V(s) = L\left[s \cdot I(s) - i(0)\right]$$

Veiem que també ens apareix una condició inicial, la intensitat que circulava en $t=0$. En total tenim dos termes igual que pel condensador, un proporcional a $I(s)$ i un que no depèn de I.

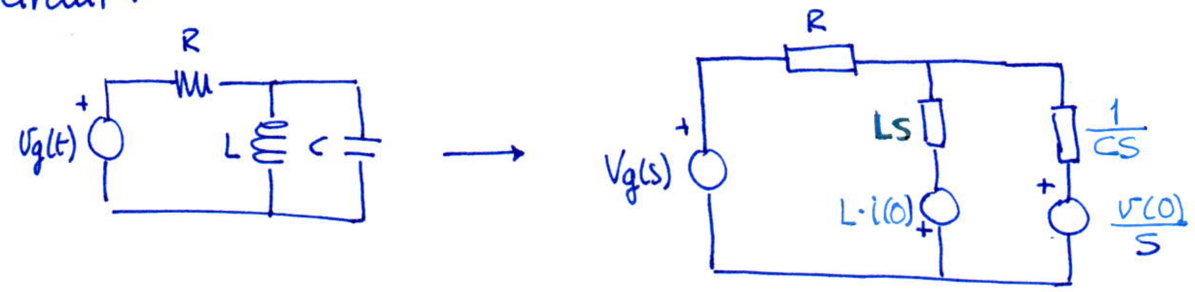


Veiem que està format per un element que és una impedància de valor Ls, i una font de tensió en sèrie de valor $-L \cdot i(0)$.

* També forma Norton

De moment dibuixarem capsetes a totes les impedàncies (R, C o L), desprès, més endavant, ja veurem si dibuixem l'element amb el seu símbol, però recordant sempre que estem en el circuit transformat.

Ex: Dibuixeu el circuit transformat corresponent al següent circuit:



2.3. IMPEDÀNCIA I ADMITÀNCIA

Al transformar el circuit, hem introduït el terme d'impedància. De la seva inversa en direm admitància (igual que en el domini temporal parlàvem de resistència i conductància).

Anem a veure com les representem:

$$Z(S) = \left.\frac{V(S)}{I(S)}\right|_{C.I=0}$$ IMPEDÀNCIA $\left[\text{Igual que resistència en el domini temporal} \quad R = \frac{v(t)}{i(t)}\right]$

$$Y(S) = \left.\frac{I(S)}{V(S)}\right|_{C.I=0}$$ ADMITANCIA $\left[\text{Igual que conductància en el domini temporal} \quad G = \frac{i(t)}{v(t)}\right]$

C.I=0 vol dir condicions inicials nul·les. Això significa segons els elements:

- Condensador: la tensió és nul·la en t=0
- Bobina: el corrent és nul en t=0

Fem una breu taula resum amb les admitàncies i impedàncies dels elements més coneguts i utilitzats:

	R	C	L
Z(S)	R	$\frac{1}{CS}$	LS
Y(S)	$G = \frac{1}{R}$	CS	$\frac{1}{LS}$

Veiem doncs que utilitzant les transformades de Laplace, hem aconseguit algebraitzar els elements dinàmics, ara ja no contenen ni integrals ni derivades. Ara els podrem tractar com si fossin resistències, utilitzant les mateixes regles. Haurem, però, de tenir sempre la precaució de transformar correctament els circuits i també els senyals, havent, després, de fer la antitransformada.

2.4. EXEMPLES D'APLICACIÓ

Veiem a continuació alguns exemples, per veure com es transformaria el circuit i els senyals, com s'analitzaria i després com trobaríem la sortida tornant al domini temporal.

CIRCUIT (domini temporal) ⟶ CIRCUIT TRANSFORMAT

↓ ↓

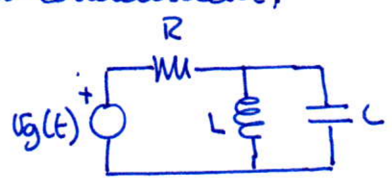
ANÀLISI (equacions diferencials) — ANÀLISI (equacions algebraiques)

↓ ↓

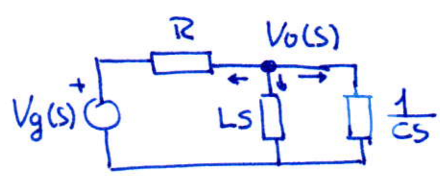
SOLUCIÓ (domini temporal) ⟵ SOLUCIÓ (domini transformat)

→ EXEMPLE 1:

Agafem en aquest primer exemple el mateix circuit que abans. En primer lloc busquem el circuit transformat. Suposarem que el condensador i la bobina no tenen condicions inicials (no tindrem les fonts en el circuit transformat per part de la bobina i el condensador).



⟷



De moment no donem valors als elements i busquem l'expressió de Vo(s). Plantegem aquí un KCL:

$$\frac{V_o(s)-V_g(s)}{R}+\frac{V_o(s)}{LS}+\frac{V_o(s)}{1/CS}=0$$

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{LS}+CS\right)V_o(s)=\frac{V_g(s)}{R} \rightarrow V_o(s)=\frac{1}{1+\frac{R}{LS}+RCS}V_g(s)$$

De moment hem trobat una expressió de Vo(s) en funció de Vg(s). Mirem de manipular-la una mica per tenir alguna cosa que després ens sigui fàcil per trobar l'antitransformada i tenir la solució en el domini temporal. Mirem de treure primer el denominador LS. Ho farem multiplicant a dalt i a baix per LS

$$V_o(s)=\frac{LS}{RLCS^2+LS+R}V_g(s)=\frac{L}{RLC}\cdot\frac{S}{S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}}V_g(s)$$

$$V_o(s)=\frac{1}{RC}\frac{s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}\cdot V_g(s)$$

Ara que tenim l'expressió força arreglada, donem valors als elements i substituïm-los a l'expressió. Els valors són:

$$R=1\ ,\quad L=4\ ,\quad C=0'5\quad i\quad v_g(t)=u(t)$$

$$V_o(s)=\frac{1}{1\cdot 0'5}\cdot\frac{\cancel{s}}{s^2+\frac{1}{1\cdot 0'5}s+\frac{1}{4\cdot 0'5}}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{2}{s^2+2s+0'5}$$

Encara no tenim una funció que coneguem la seva antitransformada, així que buscarem les arrels i mirarem de descomposar l'expressió.

$$s^2+2s+0'5=0\ \Rightarrow\ s=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot0'5}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

un cop trobades les arrels, ara podem descomposar la fracció de la següent manera:

$$V_o(s)=\frac{A}{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}+\frac{B}{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{2}{s^2+2s+\frac{1}{2}}=\frac{2}{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}$$

Ara caldrà trobar A i B. Per trobar A haurem de multiplicar els dos membres pel terme que té al denominador, és a dir, per $(s+1-\frac{\sqrt2}{2})$ i fer $s=-1+\frac{\sqrt2}{2}$. Fem-ho a l'expressió i veurem com trobem A:

$$\left.\frac{A\cdot\cancel{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}}{\cancel{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}}+\cancel{\frac{B\cdot(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}}_{0}\right|_{s=-1+\frac{\sqrt2}{2}}=\left.\frac{2\cdot\cancel{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}}{\cancel{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}\right|_{s=-1+\frac{\sqrt2}{2}}$$

Veiem que al primer membre només ens queda A:

$$A=\frac{2}{(-\cancel{1}+\frac{\sqrt2}{2}+\cancel{1}+\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{2}{\frac{\cancel{2}\sqrt2}{\cancel{2}}}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

Ara seguiríem el mateix procés per trobar B, multiplicant els dos membres per $(s+1+\frac{\sqrt2}{2})$ i fent $s=-1-\frac{\sqrt2}{2}$:

$$\left.\cancel{\frac{A\cdot(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})}}_{0}+\frac{B\cdot\cancel{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}}{\cancel{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}}\right|_{s=-1-\frac{\sqrt2}{2}}=\left.\frac{2\cdot\cancel{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}}{(s+1-\frac{\sqrt2}{2})\cancel{(s+1+\frac{\sqrt2}{2})}}\right|_{s=-1-\frac{\sqrt2}{2}}$$

Al primer membre només queda B i trobem:

$$B=\frac{2}{(-\cancel{1}-\frac{\sqrt2}{2}+\cancel{1}-\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{2}{\frac{-\cancel{2}\sqrt2}{\cancel{2}}}=-\frac{2}{\sqrt2}=-\sqrt2$$

Així tenim que $A=\sqrt{2}$ i $B=-\sqrt{2}$. Per tant l'expressió de $V_o(s)$ quedarà:

$$V_o(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(s+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - \frac{\sqrt{2}}{\left(s+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

D'aquesta expressió sí que en coneixem l'antitransformada, seran exponencials. Recordem que:

$$\frac{1}{s+\alpha} \leftrightarrow e^{-\alpha t} \quad \text{ara } \alpha = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad \alpha = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

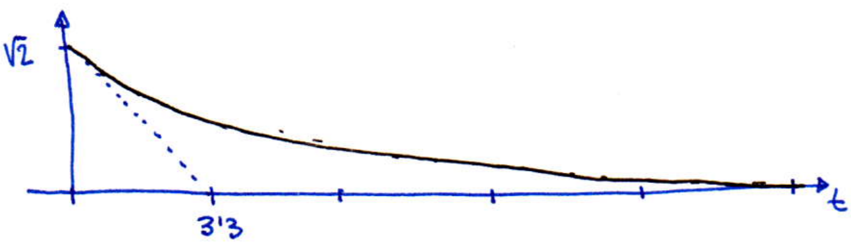
A l'exponencial posarem α en negatiu. Així quedarà:

$$v_o(t) = \sqrt{2}\, e^{-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \cdot u(t) - \sqrt{2}\, e^{-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \cdot u(t)$$

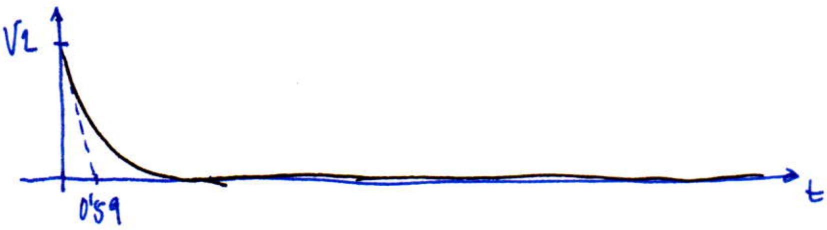
Si efectuem algunes operacions, podem posar les exponencials de manera que hi veiem clarament la constant de temps:

$$\underline{V_o(t) = \sqrt{2}\, e^{-t/3'3} \cdot u(t) - \sqrt{2}\, e^{-t/0'59} \cdot u(t)}$$

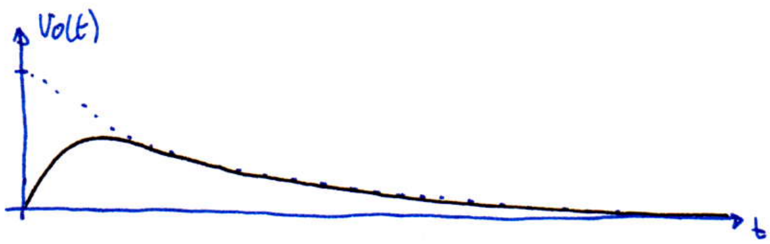
Veiem com quedaria això gràficament:



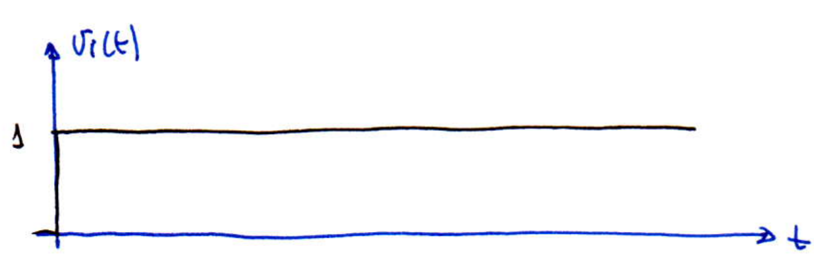
Primera exponencial de $v_o(t)$



Segona exponencial de $v_o(t)$



Sortida



Entrada

Intentem analitzar aquest resultat i veure que és coherent amb el circuit.

→ Perquè surt el senyal $v_o(t)$ de 0?
Mirant el circuit, podem veure que el condensador està inicialment descarregat. Com que no pot tenir salts bruscs de tensió, ha de sortir de 0 forçosament.
També ho podríem veure matemàticament a partir de la transformada, seguint el teorema del valor inicial, que diu:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

Així tindríem:

$$V_o(s) = \frac{2}{s^2+2s+0'5} \Rightarrow s \cdot V_o(s) = \frac{2 \cdot s}{s^2+2s+0'5} \xrightarrow[s \to \infty]{} 0 \Rightarrow v_o(0^+) = 0$$

→ Perquè tendeix la resposta a 0?
Mirant el circuit, veiem que a l'entrada tenim un graó. Al cap d'un temps, totes les variables s'acabaran estabilitzant, per tant:

$$v_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{si } i = ct \Rightarrow v_L = 0 \Rightarrow v_c = 0$$

També veiem, per tant, que forçosament la sortida a de tendir a 0 amb el temps.
Igual que abans, també ho podríem veure matemàticament a partir de la transformada, pel teorema del valor final, que diu:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

Així tindrem:

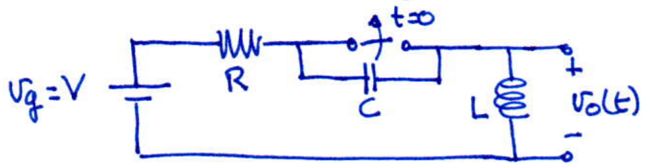
$$V_o(s) = \frac{2}{s^2+2s+0'5} \Rightarrow s \cdot V_o(s) = \frac{2 \cdot s}{s^2+2s+0'5} \xrightarrow[s \to 0]{} 0 \Rightarrow v_o(\infty) = 0$$

→ Quan dura aquesta resposta?
Hem vist que tenim dues constants de temps diferents: $\tau_1 = 3'3$ seg i $\tau_2 = 0'59$ seg. Sabem que el senyal s'extingeix al cap de 5τ, així, pel τ més gran, tindríem que dura aproximadament uns 15 seg.
En el moment que escrivim les exponencials sabem aquests valors, però de fet, aquests valors venen de les arrels del polinomi del denominador, en concret són les seves inverses, per tant ja ho podem saber sobre el circuit transformat.

Serà bo acostumar-se a validar el resultat d'aquesta manera per saber que no ens hem equivocat.

→ EXEMPLE 2:

Estudiem ara el següent circuit:

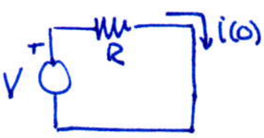


Veiem que abans de $t=0$, el C està en paral·lel amb un c.c. i per tant és superflu.

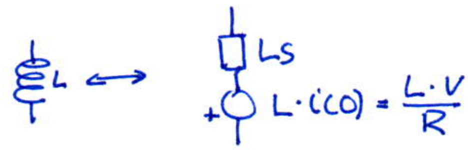
Per dibuixar el circuit transformat, haurem de buscar les condicions inicials.

El condensador no té condicions inicials, ja que per $t<0$ està en paral·lel amb un c.c. i la seva tensió és nula.

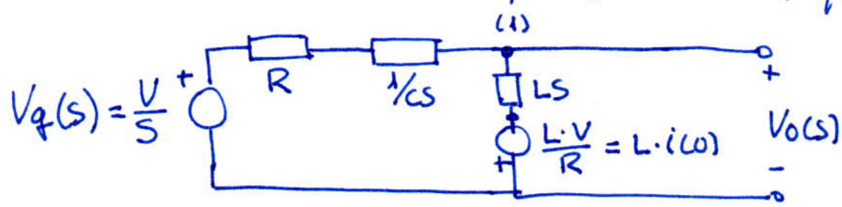
Per la bobina, sabem que abans d'arribar a $t=0$, suposem $i=ct.$ i la $v=0$, per tant la L es comporta com un c.c. Dibuixem aquest circuit i mirem quan val la $i(0)$.



$i(0) = \frac{V}{R}$ $\Rightarrow$



Dibuixem ara el circuit transformat. Recordem que, si ens interessés, podríem posar la transformada del condensador i/o de la bobina en la seva forma Norton. Aquí mantenim la Thevenin:



Volem trobar $V_o(s)$, així que anem a analitzar el circuit plantejant un KCL al node (1):

$$\frac{V_o(s) - V_g(s)}{R + \frac{1}{Cs}} + \frac{V_o(s) - (-L \cdot i(0))}{Ls} = 0 \rightarrow \frac{V_o(s) - V_g(s)}{R + \frac{1}{Cs}} + \frac{V_o(s) + L \cdot i(0)}{Ls} = 0$$

Posem denominador comú per anul·lar-lo passant-lo a l'altre membre:

$$Ls\,(V_o(s) - V_g(s)) + \left(R + \frac{1}{Cs}\right)(V_o(s) + L \cdot i(0)) = 0$$

$$V_o(s)\left[Ls + R + \frac{1}{Cs}\right] = Ls \cdot V_g(s) - L \cdot i(0)\left(R + \frac{1}{Cs}\right)$$

Multipliquem tot per Cs per treure els denominadors:

$$V_o(s) \cdot \left[LCs^2 + RCs + 1\right] = LCs^2 \cdot V_g(s) - L \cdot i(0)\,(RCs + 1)$$

Substituïm $V_g(s)$ i $i(0)$ pels seus valors i arreglem l'expressió:

$$Vo(s)\left[LCs^2+RCs+1\right]=LCs^2\cdot\frac{V}{\cancel{s}}-L\cdot\frac{V}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}Cs-\frac{L\cdot V}{R}$$

$$Vo(s)\left[LCs^2+RCs+1\right]=LC\cancel{Vs}-\cancel{LCVs}-\frac{LV}{R}$$

$$Vo(s)=\frac{-\frac{LV}{R}}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1}{LC}\cdot\frac{-\frac{LV}{R}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{-\frac{V}{RC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

Ara que ja tenim l'expressió arreglada, anem a donar valors als elements:

$R=5\Omega$, $C=400nF$, $L=100mH$

Amb això tindrem:

$$\frac{1}{RC}=\frac{1}{5\cdot400\cdot10^{-9}}=5\cdot10^5$$

$$\frac{R}{L}=\frac{5\Omega}{100mH}=\frac{5}{0'1}=50$$

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{100\cdot10^{-3}\cdot400\cdot10^{-9}}=2'5\cdot10^7$$

De moment deixem l'amplitud del senyal d'entrada V sense donar-li cap valor. No la consideraré de moment i l'afegim al final.

Escrivim ara l'expressió amb aquests valors:

$$Vo(s)=\frac{-5\cdot10^5}{s^2+50s+2'5\cdot10^7}V$$

Busquem ara les arrels del denominador, igual que hem fet abans:

$s^2+50s+2'5\cdot10^7$

$$s=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4\cdot1\cdot2'5\cdot10^7}}{2}\approx\frac{-50\pm\sqrt{-10^8}}{2}=-25\pm j\,5\cdot10^3$$

despreciem 50^2

Veiem que ens han sortit arrels complexes. Això serà habitual. El procés serà el mateix, però més complicat al treballar amb nombres complexos. A vegades serà millor passar a notació polar.

Descomposem en fraccions simples igual que abans:

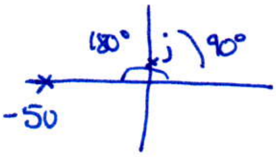
$$Vo(s)=\frac{A}{s-(-25+j5\cdot10^3)}+\frac{B}{s-(-25-j5\cdot10^3)}=\frac{-5\cdot10^5}{[s-(-25+j5\cdot10^3)][s-(-25-j5\cdot10^3)]}$$

Per trobar A, multipliquem els dos membres pel factor que té al denominador:

$$\frac{A\cdot\cancel{[s-(-25+j5\cdot10^3)]}}{\cancel{s-(-25+j5\cdot10^3)}} + \underbrace{\frac{B\cdot[s-\cancel{(-25+j5\cdot10^3)}]}{s-\cancel{(-25-j5\cdot10^3)}}}_{0}\Bigg|_{s=-25+j5\cdot10^3} = \frac{-5\cdot10^5\,\cancel{[s-(-25+j5\cdot10^3)]}}{\cancel{[s-(-25+j5\cdot10^3)]}\,[s-(-25-j5\cdot10^3)]}\Bigg|_{s=-25+j5\cdot10^3}$$

$$A=\frac{-5\cdot10^5}{\cancel{-25}+j5\cdot10^3+\cancel{25}+j5\cdot10^3}=\frac{-\cancel{5}\cdot10^5}{j\cdot2\cdot\cancel{5}\cdot10^3}=\frac{-10^5}{j\cdot2\cdot10^3}=\frac{-100}{j\cdot2}=\frac{-50}{j}$$

Passem-ho a notació polar per treballar millor:



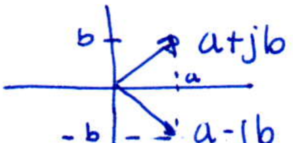
$$A=\frac{50e^{j\cdot180°}}{1\cdot e^{j\cdot90°}}$$ dividim els mòduls resteu els arguments

$$A=50e^{j90°}$$

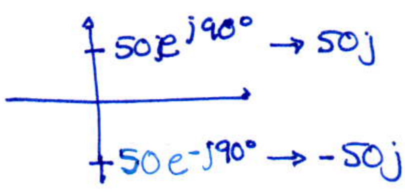
Ja hem trobat la A. Ara fem el mateix procés per trobar la B. Quan ens hi anem acostumant, ja no cal que escrivim tots els passos. Ja sabem que al primer membre només ens quedarà la B. Al segon membre ens quedarà el numerador dividit pel factor que dividia a la A, particularitzat per l'arrel que dividia a la B. Així:

$$B=\frac{-5\cdot10^5}{\cancel{-25}-j5\cdot10^3+\cancel{25}-j5\cdot10^3}=\frac{-5\cdot10^5}{-j\cdot10^4}=\frac{50}{j}\underset{\text{polar}}{=}\frac{50e^{j0°}}{e^{j90°}}=50e^{-j90°}$$

Veiem que B és el conjugat de A. Això passarà sempre que tinguem arrels complexes conjugades.



conjugats $\xrightarrow[\text{i el nostre cas}]{\text{o en polars}}$



Sabent això, quan tinguem arrels complexes conjugades, no caldrà que calculem A i B, només en calcularem un i l'altre serà el conjugat.

Ara, amb la notació polar, hem utilitzat graus, però podríem utilitzar radiants si ens convingués.

Escrivim ara l'expressió, i calculem la seva transformada inversa. Ja veiem que tindrem exponencials, però haurem de veure què farem amb els complexos.

$$V_o(s)=\frac{50e^{j90°}}{s-(-25+j5\cdot10^3)}+\frac{50e^{-j90°}}{s-(-25-j5\cdot10^3)}$$

La transformada inversa serà:

$$v_o(t) = [50 e^{j90°} e^{(-25+j\cdot5\cdot10^3)t} + 50 e^{-j90°} e^{(-25-j\cdot5\cdot10^3)t}]\, u(t)$$

Hauríem de mirar de reduir aquesta expressió i convertir-la en real. De moment separem els termes reals dels complexes:

$$v_o(t) = 50 e^{-25t} [e^{j(5\cdot10^3t+90°)} + e^{-j(5\cdot10^3t+90°)}] \cdot u(t)$$

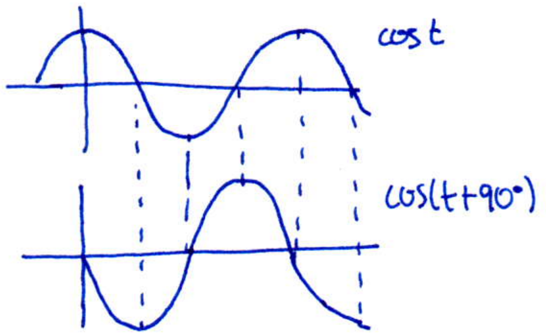
Recordem que, al veure les transformades del sinus i el cosinus vam deduir que:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \rightarrow \text{En el nostre cas tindríem: } x = 5\cdot10^3t+90°$$

Per tant podem escriure l'expressió de $v_o(t)$

$$\underline{v_o(t) = V\cdot 100\, e^{-25t} \cdot \cos(5\cdot10^3t+90°)\cdot u(t)}$$

Recordem que a $V_o(s)$ ens apareixia una V, que era l'amplitud del senyal d'entrada. L'hem anat deixant al fer els càlculs, però no la podem oblidar. Ho podem fer perquè és lineal (no si LED's, no sat...)
Veiem també que estem barrejant radiants (davant de la t) amb graus. Haurem de vigilar amb això. Ho podem deixar així, però anant en compte quan utilitzem la calculadora. En tot cas podríem posar $\pi/2$ en lloc de $90°$
Mirem ara què li passa al cosinus quan el desfasem $90°$:



Desfassar $90°$ el cosinus vol dir que allò que li passa ara per $t=0$, abans li passava per $t=90°$.
Veiem de la gràfica que es el mateix que un sinus invertit $(-\sin t)$

Així, també podríem donar la solució de la següent manera:

$$v_o(t) = -V\cdot 100\, e^{-25t} \cdot \sin(5\cdot10^3t)\cdot u(t)$$

En tots els circuits que tinguin arrels complexes conjugades passarà el mateix. Sabem que ens sortirà el cosinus, que de fet ja sabrem com serà quan trobem A i B. Quan agafem pràctica, ens podrem saltar passos.

Anem a veure ara, gràficament, com seria aquesta sortida:
Fixem-nos primer amb l'exponencial:

$$\tau = \frac{1}{25} = 40\,mseg$$

Mirem ara quina és la freqüència del sinus:

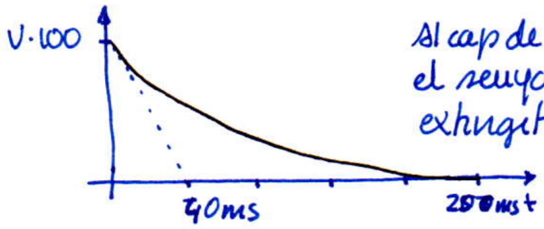
$\sin \omega t \rightarrow \omega = 5\cdot10^3$ és la pulsació. L'utilitzem per no arrossegar els 2π ja que:

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\cdot10^3}{2\pi} = 795\ Hz$ si volguessim posar la freqüència, $\omega = 2\pi f \Rightarrow \sin 2\pi f t$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{795\,Hz} = 1'25\ ms$ el període serà la inversa de la freqüència.

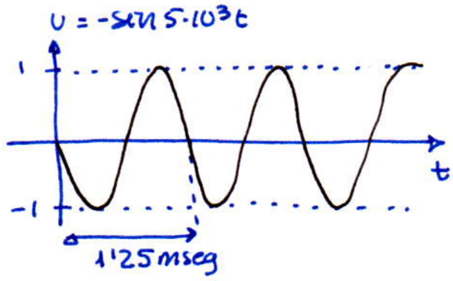
Ara já sabem quan dura cada senyal i els podem dibuixar:

$v = e^{-25t}$

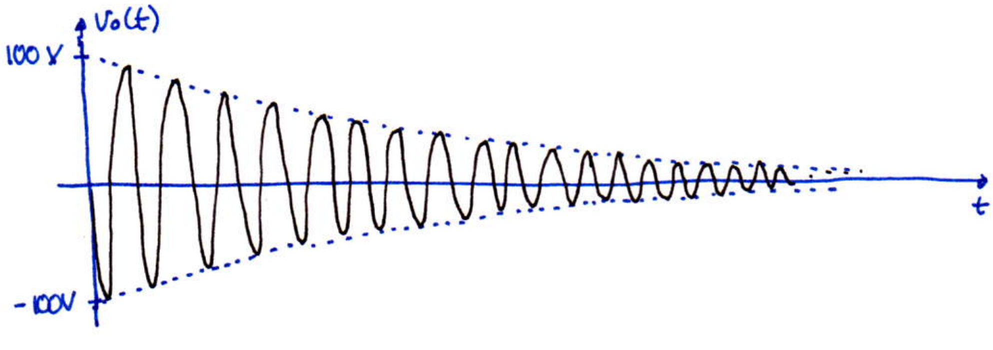


Al cap de $5\tau = 200ms$ el senyal s'haurà extingit.

$v = -\sin 5\cdot10^3 t$

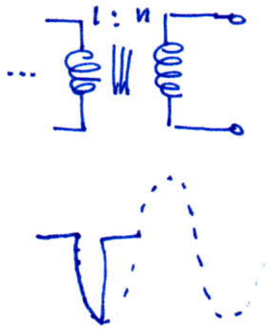


Si multipliquem ara els dos senyals, veurem que a cada τ hi caben 32 cicles del senyal sinusoidal. Al cap de 5τ (hi cabran 160 cicles del sinus), el senyal ja s'haurà extingit.
No ho podem dibuixar a escala, però aproximadament tindríem:



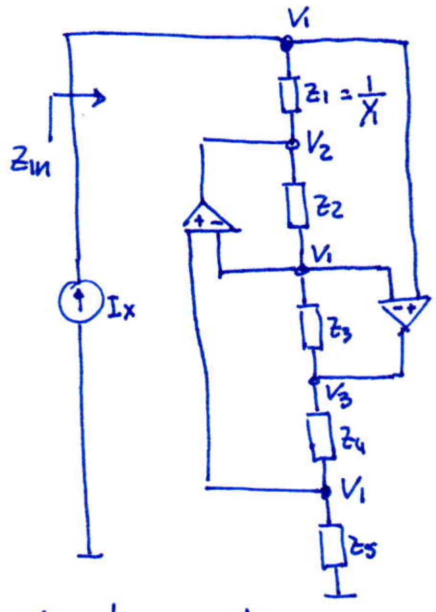
Veiem que tenim una tensió molt més alta que la que teníem a l'entrada, però això no vol dir que s'hagi creat energia (això no pot pas passar).
Noteu que si no hi hagués el condensador, s'hauria produit un pic (delta) de tensió a la bobina, ja de el corrent s'hauria tallat de cop (graó) i la seva derivada seria una delta. En aquest cas, el condensador suavitza el pic, que és elevat, però no tant.

Aquest circuit, afegint a la sortida una bobina acoplada, es podria utilitzar per fer saltar la xispa en una bugia, ja que la segona bobina tindrà més tensió. En el moment de saltar la xispa, les condicions del circuit canviaran (deixarà d'estar en c.O) i deixarà d'oscil·lar.



→ EXEMPLE 3:

Suposem el següent circuit, en el qual volem trobar la impedància d'entrada:



Recordem que la impedància d'entrada és V_{in}/I_{in}. Per calcular-la posem una font de corrent a l'entrada i buscarem el quocient per trobar-la.

Recordem que per fer l'anàlisi no plantegem equacions a les sortides del A.O's.

$$Y_1(V_1-V_2)=I_x$$
$$Y_2(V_1-V_2)+Y_3(V_1-V_3)=0$$
$$Y_4(V_1-V_3)+Y_5\cdot V_1=0$$

Arreglant aquestes equacions arribaríem a la següent matriu, a la qual també arribaríem plantejant-la directament pel mètode nodal.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ Y_2+Y_3 & -Y_2 & -Y_3 \\ Y_4+Y_5 & 0 & -Y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ens interessa trobar V_1, i ho farem resolent per Kramer, posant al numerador el determinant amb els termes independents a la primera columna i al denominador el determinant.

Així trobem:

$$V_1=\frac{Y_2Y_4}{Y_1\cancel{Y_2}Y_4+Y_1\cancel{Y_3}Y_4+Y_1Y_3Y_5-Y_1\cancel{Y_2}Y_4-Y_1\cancel{Y_3}Y_4}I_x=\frac{Y_2Y_4}{Y_1Y_3Y_5}I_x$$

Busquem Z_{in} i posem l'expressió en funció de les impedàncies i no les admitàncies:

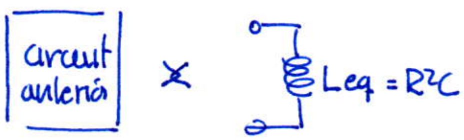
$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=\frac{\cancel{Y_2}\cancel{Y_4}}{\cancel{Y_1}\cancel{Y_3}\cancel{Y_5}}\cdot\frac{Z_1\cancel{Z_2}Z_3\cancel{Z_4}Z_5}{\cancel{Z_1}\cdot Z_2\cdot\cancel{Z_3}Z_4\cancel{Z_5}}\longrightarrow \boxed{Z_{in}=\frac{Z_1Z_3Z_5}{Z_2\cdot Z_4}}$$

Donem ara valors a les impedàncies del circuit i busquem-ho per un cas particular.

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_5 = R \\ Z_4 = \frac{1}{Cs} \end{array}\right\} \quad Z_{in} = \frac{R^3}{R \cdot \frac{1}{Cs}} = R^2 \cdot C \cdot s$$

Recordant que la impedància d'una bobina és Ls, veiem que, en aquest cas, la impedància d'entrada és com una bobina de valor R^2C : $L_{eq} = R^2C$

Així, donant valors numèrics:



Si $C = 1\mu F$, $R = 1K\Omega$ } $L_{eq} = 1\ H$

Si $C = 1\mu F$, $R = 10K\Omega$ } $L_{eq} = 100\ H$

Veiem que aquest circuit ens permet aconseguir bobines de valor molt elevat, les quals no trobaríem a la botiga. Recordem que una bobina és un fil enrotllat en un nucli, per tant una bobina gran ocuparia molt lloc, necessitaríem molt fil, i per tant, també tindria molta resistència interna.

Pensem, per exemple, que al dissenyar circuits integrats, no hi podem incloure bobines (no les podem fer tant petites), però, en canvi, sí que hi podríem posar aquest circuit al seu lloc.

Aquest circuit, però, no només té avantatges, també té limitacions. Només el podrem utilitzar en el cas que la bobina que substitueixi estigui connectada a massa (no pot estar flotant).

També té altres inconvenients:

- L'AO s'ha d'alimentar, mentre que la bobina no.
- La intensitat que passa per aquest circuit no pot ser gaire gran.
- L'AO no pot treballar a altres freqüències, màxim desenes de KHz i potser amb algun A.O especial es podria arribar a 1MHz.

Amb això, per exemple, a la sortida d'un mòbil, caldria una bobina abans de l'antena, però no podríem utilitzar aquest circuit, perquè es requereixen freqüències elevades i molta intensitat.